

# LÝ THUYẾT LƯU PHÂN BIẾN VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH MÔ TẢ

## I. KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI

### 1. Khái niệm

Ta đã biết về chỉ số Reynolds. Qua thực nghiệm, người ta thấy rằng khi  $Re > 1$  và tăng dần, nhớt động lực học của các quán tính giảm dần và khi  $Re \gg 1$ , miền nhớt động lực học này chỉ tồn tại trong một lớp có kích thước rất nhỏ so với kích thước vật thể mà lưu chất chuyển động bao quanh, và ta thấy rằng giới hạn đó là vùng lớp biên.

Năm 1904, Prandtl là người đầu tiên đề xuất nền móng cho các lý thuyết nghiên cứu dòng chuyển động có số Reynolds rất lớn - đó là lý thuyết lớp biên.

Lý thuyết lớp biên dựa trên cơ sở thực tế khi số Reynolds rất lớn, nhớt động lực học của ma sát chỉ tập trung trong miền nhớt lân cận bề mặt vật thể nên khi nghiên cứu dòng chuyển động có số Reynolds rất lớn ta chỉ cần giải bài toán dòng chuyển động nhớt trong vùng lớp biên (hay nói cách khác ta chỉ xét lưu chất là lưu chất nhớt trong vùng lớp biên), và ngoài vùng này ta có thể xem như lưu chất là lưu chất lý tưởng (không ma sát).

Cần phân biệt “nội lưu” và “ngoại lưu” biệt khi nào nhớt động lực học của ma sát là đáng kể.

Trường hợp “ngoại lưu” như chuyển động của không khí quanh máy bay, nhớt động lực học của... đây ma sát chỉ tập trung trong vùng sát bề mặt vật thể nên ta có thể ứng dụng lý thuyết thể tích của lưu chất chuyển động không quay.

Trường hợp “nội lưu” như chuyển động của lưu chất trong ống, trong kênh... đây nhớt động lực học của ma sát rất quan trọng. Do đó, vai trò của lớp biên rất quan trọng.

- phần của ống, lớp biên thường mỏng nên thường có thể xem như lưu chất lý tưởng không ma sát trừ phần nhớt vùng lớp biên.

- Nếu dài, lập biên trình để nắm chắc chi tiết toàn bộ công việc. Lưu ý thời gian này hoàn toàn chuyển động trong vùng lập biên và chú ý hình ảnh của máy sát. Nói cách khác, khi dài thì toàn bộ lưu ý trong công việc là vùng lập biên và lý thuyết cho lưu ý của máy sát phải được áp dụng.

Trong công việc này lý thuyết lập biên được giới thiệu cho chuyển động thực tế không nên có hai chiều không gian. Chúng ta sẽ nghiên cứu một số vấn đề cơ bản của lý thuyết lập biên như phát triển của lập biên, hình thức chuyển tiếp từ lập biên trình sang lập biên rẽ, hình thức tách rời lập biên và cách kiểm soát tránh tách rời lập biên, phương trình Prandtl và phương pháp tìm hình thức của máy sát bám theo các trục quay hay trục quay và trục ví dụ.

## 2. Sự phát triển của lập biên và phân loại

### 2.1. Sự phát triển của lập biên

Khi lưu ý chuyển động qua bề mặt vật thể, các phần tử lưu ý sát bề mặt, do tính nhớt, sẽ bám dính lên bề mặt vật thể, và vận tốc tang tiếp của các phần tử lưu ý có bằng không.

Do hình ảnh của máy sát nhớt, các phần tử lưu ý xa bề mặt sẽ bị giảm dần các phần tử gần bề mặt vật thể hơn. Bề dày lập biên được định nghĩa là bề mặt tiếp xúc sát bề mặt vật thể mà trong đó vận tốc chuyển động của các phần tử lưu ý còn chú ý hình ảnh của tính nhớt. Trong vùng lập biên, thành phần vận tốc tiếp tuyến với bề mặt vật thể thay đổi rất nhanh từ bề mặt không sát thành vận tốc dòng chảy do bên ngoài lập biên.

Khi mức tiếp xúc giữa dòng lưu ý chuyển động và bề mặt vật thể càng dài thì sẽ càng các phần tử lưu ý bị kéo chậm lại do hình ảnh của máy sát nhớt càng lớn, vì vậy theo chiều dòng chuyển động, bề dày lập biên càng sau càng tăng.

Hãy xét trường hợp đơn giản của chuyển động lưu ý qua trục quay:

Trình bày sự phân bố vận tốc tiếp tuyến các mặt cắt trong vùng lập biên khi có một dòng chuyển động qua trục quay.

Ở xa trục quay, vận tốc  $u$  song song với trục quay. Khi lưu ý tiến gần trục quay trục quay trục quay, vận tốc  $v$  là  $U_s$ . Ngay trục quay, lưu ý dính với bề mặt nên vận tốc  $u = 0$ . Lưu ý sát trục quay bị kéo chậm lại.

khoảng cách từ các thành phần, vùng lưu chuyển kéo dài có vận tốc giảm so với lưu chuyển tại thành phần gọi là vùng lập biên. Bề dày lập biên là  $\delta$ , trong đó vận tốc thay đổi từ  $u = 0$  ngay bề mặt thành phần đến vận tốc  $u = U_s$ , khoảng cách từ bề mặt thành phần.

Trong phần đầu tiên, lập biên gồm các thành phần lưu chuyển như gọi là lập biên tầng. Càng về sau lập biên càng dày, khi xét đến mặt trượt  $x_t$  tầng vận tốc  $Re_t$  như tầng ( $Re_t = U_s \cdot x_t / \nu$ ), lập biên trở nên bền và thành lập biên rời. Tuy nhiên sát bề mặt thành phần trong vùng lập biên biên rời, lưu chuyển vẫn chuyển thành lập, vùng đó có bề dày  $\delta_b$  tầng và gọi là lập biên tầng rời.

## **2.2. Phân loại**

### **a. Lập biên tầng**

Lập biên tầng gồm các thành phần lưu chuyển như

Trên thái lưu chuyển tầng trong các phần lưu chuyển chuyển động một cách có trật tự theo tầng.

trên thái lưu chuyển tầng, vận tốc vì mô các phần lưu chuyển chuyển động không đều, vận tốc vận tốc mô lưu chuyển chuyển động thành tầng lập bền.

Trong trên thái lưu chuyển tầng thì không có trao đổi ngang và nghiêng.

### **b. Lập biên rời**

Phần lớn các dòng chuyển động trong thiên nhiên và kỹ thuật là dòng rời. Dòng rời quan sát được trong khí quyển, dòng, dòng bao quanh máy bay, tên lửa, dòng trong ống, trong sông, kênh, vùng vệt hạ lưu sau vệt ... các dòng rời này ưu tiên do ảnh hưởng ma sát trên bề mặt vệt, hay tác động của các dòng chuyển động có vận tốc khác nhau.

Nghiên cứu dòng rời giúp ta thấy các phần lưu chuyển chuyển động ngẫu nhiên cùng các khối lưu chuyển có kích thước khác nhau gọi là các xoáy rối. Hiện tượng này gây nên trong dòng chuyển động mất ổn định nhanh và không đều vận tốc quanh mặt trượt trung bình. Nói chung, càng rối tầng khi vận tốc tầng và kích thước xoáy rối tầng theo kích thước bề mặt vệt. Thực vậy, thực nghiệm cho thấy các xoáy rối có kích thước lớn trong các kênh dẫn lớn và có kích thước nhỏ trong các kênh dẫn nhỏ khi có

cùng vận tốc trung bình. Kích thước của xoáy rối nhỏ nhất là bán kính u dài đặc trưng của dòng chuyển động, ví dụ bán kính xoáy, chiều rộng hoặc chiều sâu kênh dẫn, bề dày lớp biên...

### **c. Lớp biên chuyển tiếp**

Ở gần cuối lớp biên, các phần tử lưu chất vận chuyển theo từng lớp trong vùng lớp biên, khi này ta có lớp biên tầng. Khi bề dày lớp biên tầng dần lên, tầng tầng ta có số  $Re_\delta = U\delta/\nu$  tăng theo, tới một trị số tới hạn  $Re_1$ , tầng tầng vận chuyển vị trí  $x_1$  sẽ dao động cuối lớp biên xuất hiện, đây gọi là nhiễu sóng Tollmien-Schlichting. Tới một vị trí  $x_2$  nào đó thì các sóng này chuyển thành ba chiều, hình thành các sóng x y ra, sinh ra dòng rối trong vùng lớp biên. Sự chuyển hóa này có thể do tác động của nhiễu loạn hỗn loạn, ngoại lai trong lớp biên, hoặc do sự mất ổn định cuối lớp biên tầng do nhiễu loạn nhiễu động khuếch tán lên theo thời gian trong chế độ số Reynolds lớn (tức là khi nhiễu động cuối lớp biên mất ổn định so với các quán tính, không khi nhiễu động phát triển).

Vị trí của sự phát triển của vùng chuyển tiếp từ lớp biên tầng sang rối phụ thuộc vào nhiễu loạn tự nhiên hình học và nhiễu loạn (dòng chuyển sang bên ngoài, hình dạng vật thể chuyển động, nhám bề mặt vật thể...). Việc nghiên cứu vùng chuyển tiếp vận chuyển là một vấn đề rất phức tạp.

Trong thực tế, sự chuyển tiếp từ lớp biên tầng sang rối xảy ra trong một vùng gọi là vùng chuyển tiếp, nhưng để đơn giản hóa, người ta coi như điểm tới hạn, các đặc trưng bằng số  $Re_x$ .

Nếu tại  $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$  thì khi vận tốc phát triển, thì có thể cho ta  $Re_{x1} \approx 10^5, Re_{x2} \approx 10^6$ . Từ số  $Re_{x1}$  có thể suy ra tính toán gần đúng về lý thuyết vận chuyển như tính toán. Cho nay chúng ta có lý thuyết nào để tính cho ta trị số  $Re_{x2}$ .

### **d. Lớp biên tầng**

Ngay cả khi lớp biên đã trở nên rối, các kết quả nghiên cứu thực nghiệm cho thấy vẫn còn tồn tại một phần rất nhỏ của vận tốc mà nếu sự tiếp xúc do ma sát rối liên tục do thành phần vận tốc trung bình của các phần tử lưu chất trong vùng này chỉ do

## LÝ THUYẾT LẬP BIÊN

nh hình của ma sát nhớt. Lớp mỏng sát bề mặt vật thể này chính là lớp biên tầng mỏng. Bề dày  $\delta_b$  của lớp biên tầng mỏng này là một tỉ lệ rớt nhanh của bề dày lớp biên rời  $\delta$  và tùy vào số Reynolds  $Re_x$ .

## II. PHƯƠNG TRÌNH LẬP BIÊN

### 1. Phương trình lớp biên của Prandtl

#### 1.1. Phương trình Navier Stokes của lưu chất có ma sát

Như chúng ta đã biết:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} = \tau_{xy} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (7.1)$$

ứng suất pháp tuyến:

$$\begin{aligned}P_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{2}{3} \right) \mu \nabla \cdot V - P \\ P_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \left( \frac{2}{3} \right) \mu \nabla \cdot V - P \\ P_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \left( \frac{2}{3} \right) \mu \nabla \cdot V - P\end{aligned}\quad (7.2)$$

Phương trình Navier Stokes là:

$$\begin{aligned}\rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 w\end{aligned}\quad (7.3)$$

Hay:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho F - \nabla P + \mu \nabla^2 V$$

Phương trình liên tục cho lưu chất không nén được là:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.4)$$

### 1.2. Phương trình lập biên của Prandtl

Phương trình Navier Stokes cho chuyển động của lưu chất ma sát hai chiều không gian là:

- Phương trình liên tục:  $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$  (7.5)

- Phương trình chuyển động – cho trường hợp gia tốc trường chuyển động chỉ u theo x và do đó ngoi lực tích tác động lên lưu chất chỉ u theo x:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{-1}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \left( \frac{-1}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7.7)$$

Prandtl giả thiết rằng độ dày lớp biên  $\delta$  nhỏ hơn nhiều so với các chiều dài khác trong công bố mặt cắt. Giả sử chiều dài tiêu biểu là  $L$  và do đó  $\delta \ll L$ . Chiều x chọn dọc theo bề mặt cắt, y theo hướng độ dày lớp biên.

Ta có thể viết:  $x = x^* L$

$$u = u^* L / T \quad (x, u \text{ biến } L)$$

$$y = y^* \delta$$

$$v = v^* \delta / T \quad (y, v \text{ biến } \delta)$$

ây  $x^*, u^*, y^*, v^*$  là những số vô thứ nguyên.

Phương trình liên tục có thể viết:

$$\frac{L \partial u^*}{T L \partial x^*} + \frac{\delta \partial v^*}{T \delta \partial y^*} = 0$$

Do đó:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (7.8)$$

Như thế phương trình liên tục vẫn giữ nguyên vì các số hạng biến đổi.

- Phương trình Bernoulli áp dụng ngay ngoài lớp biên để tính vận tốc phân là:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = 0 \quad (U_s \text{ là vận tốc tại biên})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = 0$$

$$U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = \left( U_s^* \frac{\partial U_s^*}{\partial x^*} \right) \cdot \left( \frac{L}{T^2} \right) \rightarrow \text{b c } \frac{L}{T^2}$$

Như thế,  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$  phải có b c  $\frac{L}{T^2}$  phương trình Bernoulli có giá trị.

- Phương trình chuyển động theo phương x:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{-1}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Viết thành:

$$\left( \frac{L}{T^2} \right) \left( \frac{L}{L} \right) u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left( \frac{L}{T^2} \right) \left( \frac{\delta}{\delta} \right) v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \left( \frac{L}{T^2} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \right) \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + v^* \left[ \left( \frac{L}{T} \right) \left( \frac{L}{T^2} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \left( \frac{L}{T} \right) \left( \frac{1}{\delta^2} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

tất cả các số hạng u ẩn k, u có b c  $L/T^2$ , h s nh n v phải có b c  $(\delta^2/T)$

hay  $v = v^* \frac{\delta^2}{T}$ , phương trình trở thành:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left( \frac{-1}{\delta^*} \right) \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + v^* \left[ \left( \frac{\delta^2}{L^2} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] \quad (7.9)$$

B qua số hạng không ẩn k  $\left( \frac{\delta^2}{L^2} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ , phương trình chuyển động theo phương x

như sau:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{-1}{\delta} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + v \left[ \left( \frac{\delta^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \quad (7.10)$$

Phương trình chuyển động theo phương y là:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \left( \frac{-1}{\rho} \right) \frac{\partial P}{\partial y} + v \left[ \left( \frac{\delta^2 v}{\partial x^2} + \frac{\delta^2 v}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\left( \frac{\delta}{L} \right) \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \left( \frac{L}{\delta} \right) \left( \frac{1}{\rho^*} \right) \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + v^* \left[ \left( \frac{\delta^2}{L^3} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \left( \frac{\delta}{L} \right) \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right]$$

Các số hạng u không đáng kể so với  $\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial P}{\partial y}$ . Nên phương trình trên cho lưu chất

không nén có thể thành:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Tóm lại phương trình lập biên Prandtl là:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{-1}{\rho}\right) \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

- Vì v chuyển động song song với trục hoành thì  $\frac{\partial U_s}{\partial x} = 0$  nên

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (7.12)$$

### **1.3. Phương trình lập biên trên tấm phẳng**

Khi nhúng các gia tốc trọng trường không đáng kể, phương trình lập biên trên tấm phẳng thành:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.13a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.13b)$$

$$\text{Và Phương trình (khả năng)} \quad (7.13c)$$

điều kiện biên tại

$$u = 0$$

$$v = 0 \quad y = 0; u = U_s \quad y = \delta \quad \text{và } y = \infty$$

## **2. Phương trình năng lượng cân bằng biên.**

Những thông số cần biết rõ là bề dày cân bằng biên và hệ số truyền nhiệt, hệ số này tùy vào lập biên tĩnh hay rối, do đó vị trí chuyển tiếp cần cần biết rõ.



Phương pháp gần đúng của Karman (1921) áp dụng nguyên lý bảo toàn động lượng cho vùng lân cận biên (không cần giải phương trình Navier Stokes) cho kết quả khá chính xác.

Áp dụng nguyên lý bảo toàn động lượng cho thể tích kiểm soát có bề rộng 1 đơn vị và bề dày  $dx$ , bề cao  $y_2$  (yên hên)

$$\text{Khối lượng vào mặt AB là: } \int_0^{y_2} \rho u dy$$

$$\text{Khối lượng ra mặt CD là: } \int_0^{y_2} \rho u dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u dy \right] dx$$

$$\text{Khối lượng vào mặt BC bảo toàn khối lượng là: } \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u dy \right] dx$$

$$\text{Động lượng vào mặt AB là: } \int_0^{y_2} \rho u^2 dy$$

$$\text{Động lượng ra mặt CD là: } \int_0^{y_2} \rho u^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u^2 dy \right] dx$$

$$\text{Động lượng vào BC là: } U_s \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u dy \right] dx$$

$$\text{Áp lực tác động vào mặt AB là: } P y_2$$

$$\text{Áp lực tác động vào mặt CD là: } \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) y_2$$

$$\text{Lực ma sát tác động vào mặt AD là: } -\tau_0 dx$$

$$\text{Nguyên lý bảo toàn động lượng cho: } \sum F = [\Delta M]_s + [\Delta M]_v$$

$$\text{Động lượng thay đổi trong thể tích kiểm soát } [\Delta M]_v = 0 \text{ vì chuyển động dừng.}$$

Do đó:

$$P y_2 - \tau_0 dx - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) y_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u^2 dy \right] dx - U_s \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{y_2} \rho u dy \right] dx$$

$$\tau_0 + y_2 \frac{dP}{dx} = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{y_2} (U_s - u) u dy - \rho \frac{d}{dx} \int_0^{y_2} u dy \quad (7.14)$$

Ngoài lập biên, phương trình Bernoulli cho lưu chất không ma sát là :

$$P + \left(\frac{1}{2}\right)\rho U_s^2 = \text{hằng} \rightarrow \frac{dP}{dx} + \rho \frac{dU_s}{dx} \int_0^{y_2} U_s dy$$

Thay vào phương trình năng lượng (7,\*\*) trên ta có :

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{y_2} (U_s - u) u dy + \rho \frac{dU_s}{dx} \int_0^{y_2} (U_s - u) dy \quad (7.15)$$

Vì ngoài lập biên  $u = U_s$  nên:

$$\int_0^{y_2} (U_s - u) u dy = 0 \text{ và } \int_0^{y_2} (U_s - u) dy = 0$$

Nên :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (U_s - u) u dy + \rho \frac{dU_s}{dx} \int_0^{\delta} (U_s - u) dy \\ \tau_0 &= \rho \frac{d}{dx} (U_s^2 \delta_1) + \rho U_s \delta \frac{dU_s}{dx} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Trong hình phẳng  $U_s$  hằng nên  $\frac{dU_s}{dx} = 0$ , ứng suất ma sát bề mặt là :

$$\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (U_s - u) u dy = \rho U_s^2 \frac{d\delta_1}{dx} \quad (7.17)$$

### III. MÔ TẢ VÍ DỤ LẬP BIÊN TRONG TÂM PHẪNG TRONG CHUYỂN ĐỘNG

#### 1. Lập biên tầng

Bên dưới lập biên, ứng suất ma sát bề mặt, hệ số ma sát bề mặt hay trung bình trên mặt khảo sát tâm phẳng đều có thể tính các tâm phẳng trên và các phân bố vận tốc trong lập biên.

Phương trình năng lượng của Prandtl cho lập biên trên tâm phẳng là:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{bề mặt tâm phẳng } y=0, u=0, v=0 \text{ nên } \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

Điều kiện  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  rút ra phương pháp của Prandtl để giải phương trình Navier-Stokes và giả thiết rằng vận tốc lún chuyển gần bề mặt tầng biên rất nhỏ và chỉ có ứng suất tiếp tác động lên lún chuyển. Do đó trong khoảng rất sát bề mặt tầng biên ứng suất tiếp bằng:

$$\frac{du}{dy} = 0 \rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

### 1.1. Bề dày lớp biên

Tổng quát:  $\tau_0 = \rho \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} (U_s - u) u dy \right] = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}$

i/ Dùng sự phân bố vận tốc:  $\frac{u}{U_s} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$

Thay vào ta có:

$$U_s^2 \rho \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_s} \right) \left( \frac{u}{U_s} \right) dy \right] = \mu \frac{3 U_s}{2 \delta}$$

$$\rho U_s^2 \left( \frac{39}{280} \right) \frac{d\delta}{dx} = \left( \frac{3}{2} \right) \mu \left( \frac{U_s}{\delta} \right) \text{ hay } \delta \cdot d\delta = \left( \frac{140}{13} \right) \mu \frac{dx}{\rho U_s}$$

Lấy tích phân xong lấy cận ta có:

$$\delta = 4,46 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_s}}$$

Hệ số tích phân bằng không vì khi  $x=0$ ,  $\delta=0$ . Để định vô thức nguyên thì:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{U_s \cdot x \cdot \nu}} = 4,64 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Bề dày dịch chuyển:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_s} \right) dy = 0,375\delta$$

ii/ Dùng phân bố vận tốc:  $\frac{u}{u_s} = \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}$

Suy ra:  $\frac{\delta}{x} = \frac{4,80}{\text{Re}_x^{-1/2}}$

$$\frac{\delta^*}{x} = 1,74 \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$C_f = 0,654 \text{Re}_x^{-1/2}$$

### 1.2. Hệ số ma sát áp dụng

$$C_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2} \rho U_s^2} = \frac{(3/2) \mu (U_s / \delta)}{\frac{1}{2} \rho U_s^2} = \frac{0,323 \rho U_s^2 / \sqrt{\rho U_s^2 x / \mu}}{\frac{1}{2} \rho U_s^2}$$

$$C_f = 0,646 \text{Re}_x^{-1/2}$$

### 1.3. Hệ số ma sát trung bình $C_f$ và hệ số lún $C_D$

$$C_f = C_D = \frac{\int_0^{x_L} \tau_o dx}{\frac{1}{2} \rho U_s^2 x_L} = \frac{1,292}{(\text{Re}_{x_L})^{1/2}}$$

Tóm lại:

Các kết quả về biên độ biên, hệ số ma sát áp dụng và hệ số ma sát trung bình là:

$$\frac{\delta}{x} = 4,46 (\text{Re}_x)^{-1/2}, \quad c_f = 0,646 (\text{Re}_x)^{-1/2}$$

$$C_f = 1,292 (\text{Re}_{x_L})^{-1/2}$$

Kết quả áp dụng pháp nghiệm (của Karman) em so với kết quả chính xác của Blasius (giải phương trình của Navier Stocks) và nghiệm thành phần phương trình biên của Prandtl) như bảng dưới.

	$\delta/x$	$C_f$	$\delta^*/x$
Karman nghiệm	$4,46 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,292 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,74 (\text{Re}_x)^{-1/2}$
(phân bố bậc 3)			
(phân bố sin)	$4,80 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,308 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,74 (\text{Re}_x)^{-1/2}$
Blasius chính xác	$4,91 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,328 (\text{Re}_x)^{-1/2}$	$1,73 (\text{Re}_x)^{-1/2}$

Lớp biên tầng trở thành lớp biên rời  $Re_x$  khoảng  $300.000 \rightarrow 500.000$  tu  
nhắm bám tầng chuyển và rời dòng lưu do (ngoài lớp biên).

## 2. Lớp biên rời

Cách tìm  $\delta$  của tầng tầng nh trên nh này v i s phân b v n t c khác.

Prandtl giả thiết:

$$\frac{u}{U_s} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}$$

Phân bố vận tốc cho  $y \geq \delta_b$  chỉ không thể áp dụng cho các vùng lớp biên  
ng m (vì không thể tính ứng suất ma sát tầng tầng chuyển theo đạo hàm tại  $\left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$

$$\left( \frac{U_s}{7} \delta^{-1/7} y^{-6/7} \Big|_{y=0} \right) \rightarrow x$$

Trong lớp biên tầng ng m thì giả thiết:

$$\frac{u}{u_b} = \frac{y}{\delta} (y \leq \delta_b)$$

Trong trường hợp lớp biên rời, thông thường ta giả thiết lớp biên rời ngay tại  
nơi gần cách tính vì vận tốc tầng chuyển dài hay ngắn, phân lớp biên tầng r t ng n so  
v i phân lớp biên r i và có khi người ta làm nhầm bám tầng tầng lớp biên r i s m (s  
Reynolds tính nhẩm lúc sơ s ).

ứng suất ma sát tính theo kết quả thực nghiệm của Blasius:

$$\tau_0 = 0,0225 \rho U_s^2 \left( \frac{y}{U_s \delta} \right)^{1/2}$$

Kết quả này có thể cho trường hợp lưu chuyển rời trong ống tròn, em áp dụng cho  
tầng chuyển v i giả thiết, nếu ứng suất trở thành tầng chuyển, bán kính lớp biên  $= R$ , bán  
kính ống.

Kết quả trên là cho:  $5.10^5 \leq Re_x \leq 10^7$

$$\text{V i nh ngh a: } c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho U_s^2} = 0,045 (Re_\delta)^{-1/4}$$

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (U_s - u) u dy = \rho U_s^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \right] \left( \frac{y}{\delta} \right)^{4/7} dy \\ &= 0,0225 \rho U_s^2 \left( \frac{v}{U_s \delta} \right)^{1/4}\end{aligned}$$

Kiểm tra :

$$\delta^{1/4} d\delta = 0,232 \left( \frac{v}{U_s} \right)^{1/4} dx$$

Giải tích lập biên rớt, tích phân cho kiểm tra :

$$\begin{aligned}\frac{4}{5} \delta^{5/4} &= 0,232 \left( \frac{v}{U_s} \right)^{1/4} x \\ \delta &= 0,371 \left( \frac{v}{U_s} \right)^{1/5} x^{4/5} \rightarrow \frac{\delta}{x} = 0,371 \left( \frac{v}{U_s x} \right)^{1/5} \\ \text{Re}_{\delta} &= 0,371 \text{Re}_x^{4/5} \\ \frac{\text{Re}_{\delta}}{\text{Re}_x} &= 0,371 \text{Re}_x^{-1/5} \\ \delta &= 0,371 \text{Re}_x^{-1/5}\end{aligned}$$

Bề dày dịch chuyển:

$$\begin{aligned}\delta^* &= \frac{\delta}{8} \left( 1 - \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_s} \right) dy \right) \\ \frac{\delta^*}{x} &= 0,046 \text{Re}_x^{-1/5}\end{aligned}$$

Bề dày động năng:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{7}{72} \delta \left( 1 - \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_s} \right) \left( \frac{u}{U_s} \right) dy \right) \\ \frac{\delta_1}{x} &= 0,036 \text{Re}_x^{-1/5}\end{aligned}$$

Thay  $\text{Re}_{\delta} = 0,371 \text{Re}_x^{4/5}$  vào  $\tau_0$  và  $c_f$  ta có:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= 0,0225 \rho U_s^2 \text{Re}_{\delta}^{-1/4} \\ \tau_0 &= 0,0225 \rho U_s^2 \text{Re}_x^{-1/4}\end{aligned}$$

Hệ số ma sát cục bộ phụ thuộc vào:  $c_f = 0,045 \text{Re}_\delta^{-1/4}$

$$c_f = 0,0576 \text{Re}_x^{-1/4}$$

Hệ số ma sát trung bình trong khoảng  $x_L$  là:

$$C_f = \frac{\int_0^{x_L} \tau_0 dx}{\frac{1}{2} \rho U_s^2 x_L} = \frac{0,072}{\left( \frac{\rho U_s^2 x}{\mu} \right)^{1/5}} = 0,072 \text{Re}_x^{1/5}$$

Các kết quả trên là cho trường hợp:  $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$

Kết quả thí nghiệm cho thấy:  $C_f = 0,074 \text{Re}_x^{-1/5}$

Khi  $5 \cdot 10^7 < \text{Re}_x < 10^9$  kết quả thực nghiệm theo rớt của công thức của Schlichting:

$$C_f = \frac{0,455}{(\log_{10} \text{Re}_{xL})^{2,58}}$$

### 3. Lập biên trình nghiệm

Bề dày lớp biên trình nghiệm  $\delta_b$  có thể tìm được theo  $\delta$  và  $y$  khi biết  $u_b$  trong khoảng  $0 < y < \delta_b$  là:

$$\frac{u}{u_b} = \frac{y}{\delta_b}$$

Do đó:  $\tau_0 = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \mu \frac{u_b}{\delta_b} = 0,0225 \rho U_s^2 \text{Re}_\delta^{-1/4}$

(Thí nghiệm Blasius)

$$\frac{\delta_b}{\delta} = \frac{u_b}{U_s} \frac{1}{0,0225} (\text{Re}_d)^{-3/4}$$

$$y = \delta_b \text{ và } \frac{u_b}{U_s} = \left( \frac{\delta_b}{\delta} \right)^{1/7} \rightarrow \frac{\delta_b}{\delta} = \left( \frac{u_b}{U_s} \right)^7$$

$$\frac{u_b}{U_s} = 1,88 (\text{Re}_\delta)^{-1/8} = 2,13 (\text{Re}_x)^{-1/10}$$

